MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduscol

Cycles 3 et 4

Mathématiques

Jeu pour introduire une notion

United Square (2) – Assembler…

Pré requis

Aucun si ce n'est pour certaines phases possibles du travail, savoir repérer les éléments de symétrie (axe et/ou centre) d'une figure.

Objectifs

Compétences travaillées

Chercher	• S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle. • Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. • Simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
Modéliser	• Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).
Représenter	• Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures (**cycle 3**).
Raisonner	• Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui (**cycle 3**). • Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose (**cycle 3**). • Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation (**cycle 4**).
Communiquer	• Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation. • Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. (**cycle 3**) • Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme).

Dans les programmes

- Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique (**cycle 4**)
- Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture (**cycle 4**).
- Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme ; reconnaître des schémas (**cycle 4**).

Introduction

Au départ, ce n'est qu'un jeu récemment commercialisé aux jolies pièces colorées et aux règles fort simples. Après quelques parties, il est évident qu'une indéniable profondeur stratégique est présente. À chaque nouveau placement de pièce, un choix est à faire. Pour cela, il faut réfléchir à ses conséquences, évaluer son intérêt en termes de points gagnés et anticiper les réactions adverses. En un mot, des raisonnements sont constamment à développer et de multiples compétences sont à mobiliser.
Il est dès lors intéressant de voir si ce jeu ne pourrait pas trouver sa place dans des séquences d'apprentissages de cycle 3 ou de cycle 4. Pour cela, quelques exemples d'activités sont proposés et peuvent être employés à divers moments que ce soit dans le cadre d'un cours, d'une phase d'accompagnement personnalisé ou d'un travail personnel en autonomie. Pour chacune des trois principales, aucun pré-requis n'est nécessaire et une séance d'une heure peut suffire mais est extensible en fonction des questionnements générés ou des besoins du public auquel on s'adresse. Enfin, les problèmes abordés bien que tous issus du jeu, peuvent être traités indépendamment les uns des autres et donc aussi partiellement.

Le jeu *United Square* est gratuitement disponible en version en ligne ou sous forme d'applications à l'adresse : united-square.com

Organisation matérielle

- Matériel de jeu issu de la boîte « United Square »
- Feuilles d'accompagnement et de recherche :
  - Rectangles et carrés
  - Symétriques
  - Bordures
  - Bien coloriés

Déroulé

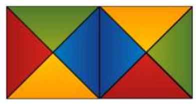
Ayant à disposition les six pièces différentes du jeu *United Square*, très naturellement et sans avoir besoin de donner la moindre consigne, instinctivement même, l'envie est forte de vouloir créer de jolis motifs colorés et pour cela de mettre en contact des triangles de même teinte pour former des carrés. On applique alors la stricte règle du jeu de placement des pièces. Un moyen basique donc de découvrir cette principale règle mais, aussi et surtout, de s’entrainer à pouvoir répondre, lors d'une partie de *United Square* à la question : « À cet emplacement, quelle pièce vais-je pouvoir placer ? ».

Cette forme d'activité proche des puzzles, aura pour objectif d'entraîner et de développer des capacités visuelles d’anticipation. À cette partie visible de l’activité s'ajoutera toute une gamme de questionnements annexes nécessitant la mobilisation de compétences purement mathématiques, notamment autour de la symétrie axiale, et de la mise en œuvre de multiples raisonnements différents.

En termes de démarche et à l’image de ce qui a été fait précédemment lors de la recherche des pièces, chacun des travaux débutera par une interrogation, une question ouverte : **quels rectangles ou carrés peuvent être obtenus en juxtaposant certaines des six pièces différentes du jeu ?**

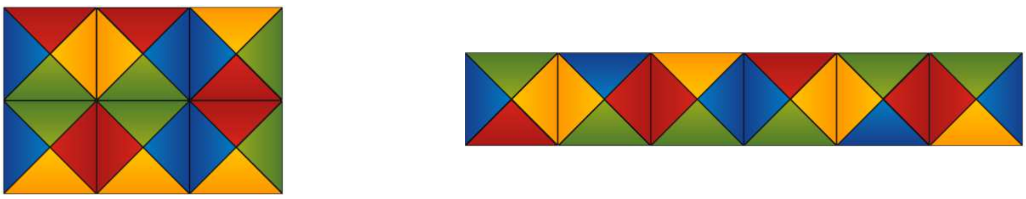
Des rectangles ou des carrés

Rectangle d’aire 1



Rectangle d’aire 2

Avec un lot de six pièces différentes, quels sont donc les rectangles qu’il est possible d’obtenir ? Une question simple à laquelle, même sans être formellement posée, beaucoup vont intuitivement tenter de répondre. Après avoir très rapidement obtenu un premier succès, de nouvelles questions émergent. Y aurait-il d’autres rectangles ? Que sont des rectangles différents ? Une forme dans laquelle les couleurs sont disposées différemment ? Non, plutôt un rectangle qui va nécessiter pour l’obtenir d’employer plus ou moins de pièces du jeu. La question initiale est alors reformulée collectivement, nous cherchons à créer des rectangles d’aires différentes à partir de toutes ou certaines des pièces d’un lot de six pièces de base. Aisé d’obtenir un rectangle d’aire 1, d’ailleurs ce n’est que simplement une pièce de base, puis tout aussi facilement nous aboutissons à des rectangles d’aire 2 puis 3, 4, 5 ou 6.
Point intéressant à mettre en lumière, il est possible de former deux rectangles différents d’aire 4 et d’aire 6. En effet 4 peut être décomposé en 1×4 ou 2×2 et 6 quant à lui en 1×6 ou 2×3. L’occasion de faire le lien entre propriétés géométriques et arithmétiques, de parler de diviseurs et de multiples ou encore de rappeler la méthode de calcul de l’aire d’un rectangle.



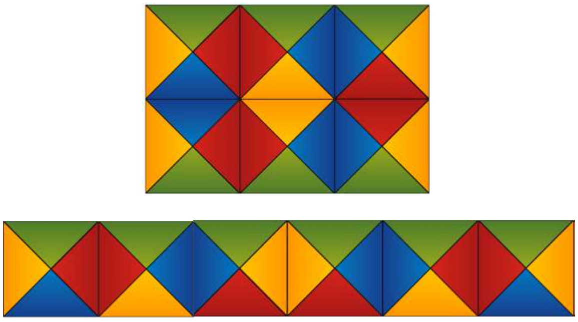
Rectangles d’aire 6

Pour s'assurer que ces notions et ce type de raisonnement, partant de l’aire, être capable de retrouver les dimensions entières de tous les rectangles possibles ayant cette aire, un nouveau questionnement peut être proposé : **avec les 24 pièces du jeu, quels sont tous les rectangles différents qu’il est possible de former ?**
Après un rapide raisonnement numérique, logiquement quatre rectangles sont à envisager : 1×24, 2×12, 3×8 et 4×6. Le premier est trivial à obtenir. Les autres nécessiteront davantage de réflexion quant aux placements des différentes pièces. Le plus souvent d’ailleurs, ce sera le placement de l’ultime pièce qui nécessitera des retours en arrière pour corriger le mauvais choix effectué. Une tâche qu'il est possible de proposer en travail de groupe afin d'en réduire la durée.
Enfin, troisième situation de recherche possible, avec deux lots de pièces de base soit 12 pièces, il faut

chercher tous les carrés qu'il est possible de former. L'occasion est offerte de parler de classification des quadrilatères et de rappeler que le carré n'est qu'un type particulier de rectangle.
12 pièces donc trois carrés à envisager, l'évident 1×1 à ne pas oublier, le 2×2 déjà trouvé précédemment et le 3×3. Ce travail de base, adapté à un jeune public, peut bien évidemment être étendu à la recherche, plus riche, de tous les carrés qu'il est possible de former en utilisant toutes les pièces du jeu, la 25ème marquée d'une croix blanche comprise. Ainsi s'ajoutent deux cas de figure à envisager, les carrés 4×4 et 5×5. On comprend alors pourquoi cette étrange et inattendue 25ème pièce a été ajoutée au jeu *United Square* : offrir la possibilité d'un plateau de jeu à la parfaite forme carrée.

Des éléments de symétrie

Dans un second temps, en ajoutant quelques conditions supplémentaires, la recherche de rectangles retrouve un caractère intéressant et de compétences attendues au cycle 3, nous pouvons nous diriger vers un travail davantage en adéquation avec des thèmes développés au cycle 4. **Si nous cherchions par exemple à produire des assemblages symétriques ?**
Il est rapidement acquis que des rectangles 1×6 ou 2×3 ne peuvent posséder deux axes de symétrie. Il faudrait évidemment pour cela que, sur une même pièce, une couleur soit présente deux fois en position opposée. Ce point étant exclu, pas de rectangle formé avec un lot de six pièces différentes et ayant deux axes de symétrie. Un rectangle ne peut donc avoir au maximum qu'un seul axe de symétrie et celui-ci ne peut partager une pièce en deux.



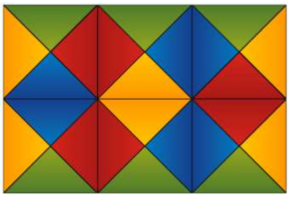
Exemples de rectangles d'aire 6 ayant un axe de symétrie

Peut être un centre de symétrie alors ? Non, pas plus ! Pour cela, il faudrait disposer de deux pièces identiques pour les « coins » du rectangle. Impossible si on se limite à un lot de six pièces différentes.
Il nous reste la possibilité d'augmenter le nombre de pièces disponibles avec éventuellement des doublons présents ou de changer l'aire, c'est-à-dire le nombre de pièces à assembler, ou encore la forme à créer. Tout un panel d'activités complémentaires est donc envisageable pour maîtriser les notions de symétries et développer des argumentations variées.

Des côtés bien colorés

En dernier lieu, il est possible de chercher à imposer aux rectangles à former des conditions quant aux couleurs des côtés. **Peut-on obtenir des rectangles possédant les côtés d'une seule et même couleur ? De deux couleurs différentes ? De trois couleurs ?**
De nouvelles formes de raisonnements ou d'arguments vont alors être nécessaires. En effet, il est aisé de prouver qu'un problème possède une solution, il suffit de l'exhiber. Par contre, comment convaincre qu'une situation ne peut aboutir ? Il faut alors prouver que le problème est impossible et ici, la richesse et la variété des arguments, des raisonnements à employer offrent l'occasion de travailler l'argumentation de manière tout à la fois profonde et simple.
Par exemple, une seule couleur de bordure est impossible. 10 triangles d'une même couleur, dans le cas du rectangle 2×3, ou 14, pour le rectangle 1×6, sont nécessaires afin d'obtenir un bord d'une unique couleur. Malheureusement avec six pièces différentes, seuls six triangles identiques sont disponibles.
Il reste alors les autres cas à étudier : deux couleurs sur les bords puis trois couleurs et enfin, éventuellement, quatre.

La première situation se résout rapidement.



Seules deux couleurs sont présentes sur les bords

Dans les autres cas, ce seul argument ne peut suffire et il va falloir distinguer et traiter les différents cas de figure possibles… Éliminons déjà la recherche d'éventuels rectangles 1×6. Pour disposer sur les bords de trois ou quatre couleurs, les deux longueurs, soit deux fois six triangles d'une même couleur sont nécessaires. Il faut donc disposer de six pièces dont les deux mêmes couleurs sont en opposition. Impossible, seules deux tels carrés existent pour chaque couple de couleurs. Qu'en est-il maintenant des rectangles 2×3 ?
Il est clair que pour trois ou quatre couleurs sur les bords, au moins une longueur va être concernée et nécessiter trois triangles d'une même couleur. Il en restera alors trois à employer pour les contacts « intérieurs ». Comme ceux-ci vont forcément par paire puisque seuls des triangles d'une même couleur peuvent se correspondre, l'un d'entre eux va se retrouver esseulé. Impossible ! Des rectangles constitués d'un lot de six pièces différentes et à bords de trois ou quatre couleurs différentes n'existent donc pas.
Ce double raisonnement, à la fois sur le nombre de triangles disponibles d'une même couleur et sur la parité du nombre de ceux nécessaires pour les contacts « intérieurs », peut se généraliser à toutes les tailles de rectangles. Pourquoi se limiter au seul emploi d'un seul lot de six pièces différentes ? Impossible par exemple de former des rectangles aux côtés de quatre couleurs différentes si longueur et largeur ne sont pas de même parité. Cette condition nécessaire mais aussi suffisante d'existence de tels rectangles peut être l'objectif d'un raisonnement de fin de cycle 4.
Enfin, si l'on affaiblit légèrement la condition imposée, avoir certes trois côtés de couleurs uniformes et différentes, mais sans rien exiger du dernier côté, le problème admet une solution.

Différentes compétences et connaissances

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Communiquer	Cycle 3	Cycle 4
"Rectangles & carrés"	●		●	●	●	Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule ; Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes.	Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique ; Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme.
"Symétriques"	●		●	●	●	Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes ; Axe de symétrie d'une figure, figures symétriques par rapport à un axe.	Comprendre l'effet des symétries axiales et centrales ; Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.
"Bordures"	●		●	●		Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes.	Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.
"Bien colorés"	●		●	●	●	Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes.	Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.

Différents parcours

Pour s'adapter aux différents niveaux (cycle 3 ou cycle 4), mais aussi aux différents profils et besoins des élèves et en vue de la réussite de tous, de multiples supports et compléments peuvent être employés ou envisagés.

<table>
<tr><th>Questionner</th><th>Différencier</th><th>Prolonger / Évaluer</th></tr>
<tr><td>Quels rectangles ou carrés peuvent être obtenus en juxtaposant un certain nombre des six pièces différentes du jeu?</td><td>Un support de recensement des configurations et de suggestion de réflexion sur les dimensions des formes à obtenir :
• fiche « Rectangles & carrés »</td><td></td></tr>
<tr><td>En employant les six pièces différentes du jeu, peut on obtenir un rectangle ayant un axe de symétrie ?
Deux axes de symétrie ?
Un centre de symétrie ?</td><td colspan="2">En préparation au questionnement spécifique proposé ou en évaluation de la maitrise des notions d'axe et de centre de symétrie, une tâche plus libre pour laquelle la forme à obtenir n'est pas imposée :
• fiche « Symétriques »</td></tr>
<tr><td>En employant les six pièces différentes du jeu, peut on obtenir un rectangle ayant ses côtés d'une seule et même couleur ? Les côtés opposés de même couleur ?
Les côtés de quatre couleurs différentes ?</td><td>Un travail préparatoire aux conditions moins fortes car aboutissant à moins de "régularités" dans les figures à obtenir :
• fiche « Bordures »</td><td></td></tr>
<tr><td>En employant certaines des 24 pièces d'une boîte de jeu, peut on obtenir un carré de 9 pièces dont chacun des cotés est d'une couleur différente ?
Un carré de 16 pièces vérifiant la même condition?
Un rectangle de 12 pièces ?</td><td colspan="2">Une limitation du nombre de pièces disponibles, seulement 12, et donc du nombre de solutions possibles tout en les limitant à des carrés :
• fiche « Bien colorés »</td></tr>
</table>

RECTANGLES & CARRÉS

En employant certaines des six pièces différentes à votre disposition, vous allez chercher à recenser tous les rectangles, éventuellement carrés, de dimensions différentes qu'il est possible de former.
Une seule condition est à respecter :

Seuls des triangles de même couleur peuvent être mis en contact.

Vous reproduirez chacune de vos solutions dans le quadrillage suivant et complèterez le tableau récapitulatif indiquant les dimensions des rectangles obtenus.

Nombre de pièces utilisées	*Longueur du rectangle*	*Largeur du rectangle*

Nombre de pièces utilisées	*Longueur du rectangle*	*Largeur du rectangle*

SYMÉTRIQUES

Vous allez employer totalement un lot de six pièces de base et les juxtaposer de façon à ce que les couleurs en contact soient identiques.

En respectant ces conditions, formez un assemblage ayant un axe de symétrie.

Peut-on obtenir un assemblage ayant deux axes de symétrie ? Pourquoi ?

Ayant un centre de symétrie ? Pourquoi ?

Désormais, vous disposez de deux lots de pièces de base et vous pouvez vous limiter à ne les utiliser que partiellement.

En respectant ces conditions, tentez de former un assemblage ayant un axe de symétrie, puis un centre de symétrie.

BORDURES

En employant la totalité des six pièces différentes à votre disposition, vous allez chercher à obtenir des rectangles dont les côtés respecteront les conditions de couleurs fixées.
En outre, une autre condition sera à respecter :

Seuls des triangles de même couleur peuvent être mis en contact.

Vous reproduirez chacune de vos solutions dans le quadrillage fourni.

Un rectangle dont sur les côtés les quatre couleurs sont présentes et aucun n'est d'une unique couleur.

Un rectangle dont sur les côtés les quatre couleurs sont présentes et trois sont d'une unique couleur.

Un rectangle dont sur les côtés exactement trois couleurs sont présentes.

Un rectangle dont sur les côtés exactement deux couleurs sont présentes.

BIEN COLORIÉS

En employant certaines pièces de deux lots de six pièces différentes à votre disposition, vous allez chercher à obtenir des rectangles.
Trois conditions sont à respecter :

- ***Seuls des triangles de même couleur peuvent être mis en contact.***
- ***Chaque côté sera d'une unique couleur.***
- ***Les quatre côtés seront de couleurs différentes.***

Vous reproduirez chacune de vos solutions dans le quadrillage fourni ou vous tenterez d'expliquer pourquoi la solution ne peut exister.